

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Využití 1-VMV ohodnocení grafů
Utilization of 1-VMV labelings of graphs

Zadání bakalářské práce

Student: **Jaroslav Žáček**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Využití 1-VMV ohodnocení grafů**
Utilization of 1-VMV labelings of graphs

Zásady pro vypracování:

Magická ohodnocení grafů patří mezi "klasická" témata teorie grafů. Existuje řada různých typů magických ohodnocení. Ukazuje se, že tzv. 1-VMV ohodnocení (nazývá se také "distance magic" ohodnocení) má pěknou aplikaci při sestavování neúplných sportovních turnajů. Cílem práce je shrnout stávající známé týkající se neúplných sportovních turnajů výsledky a řešení některých otevřených problémů v této oblasti.

Práci lze rozdělit do následujících částí:

- magická ohodnocení grafů, studium známých výsledků a technik
- zpracování přehledu nevyřešených případů
- řešení některých souvisejících otevřených problémů

Přínosem jsou nejen nové výsledky ale i rozbor omezení známých postupů.

Seznam doporučené odborné literatury:

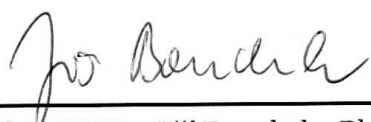
- W. Wallis: Magic graphs, Birkhauser 2000.
- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, The Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2005).
- odborné články a texty podle pokynů vedoucího

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 18.11.2011

Datum odevzdání: 04.05.2012



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 4. května 2012


.....

Chtěl bych zde poděkovat mému vedoucímu Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za jeho cenné rady a pomoc, bez níž by tato bakalářská práce nemohla nikdy vzniknout. Dále bych rád poděkoval všem kamarádům a příbuzným, kteří mě během studia podpořovali, hlavně mým rodičům.

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na využití grafů s takzvaným 1-VMV ohodnocením, pro které se v poslední době vžil alternativní název „distance magic ohodnocení“. Práce shrnuje známé výsledky v oblasti distance magic ohodnocení grafů, ovšem hlavním přínosem je popis induktivní konstrukce distance magic grafů, které lze použít při plánování neúplných sportovních turnajů. Navíc oproti zadání bakalářské práce je zde část zaměřená na možnost určité přímé či nepřímé dominance v těchto turnajích, která zajistí každému účastníkovi turnaje (hráči či týmu) stejnou šanci stát se tzv. králem turnaje. Tato problematika nebyla zatím v žádné literatuře řešena.

Klíčová slova: distance magic, král turnaje, spravedlivý turnaj, vyrovnaný neúplný turnaj

Abstract

This thesis is focused on the use of graphs with a 1-VMV labeling, which is recently called „distance magic labeling“. Thesis sums up known results in the area of distance magic graphs which can be used for scheduling incomplete sports tournaments. In addition to the assignment of thesis there is a part focused on possibility of direct or indirect domination in these tournaments to ensure every member in tournament (player or team) can become a so-called king of tournament. This issue has not been addressed in any literature before.

Keywords: distance magic, king of tournament, fair tournament, equalized incomplete tournament

Seznam použitých symbolů a zkratek

$G = (V, E)$	– Graf G s množinou hran E a množinou vrcholů V
$ E $	– Velikost množiny E
K_n	– Kompletní graf na n vrcholech
$K_{m,n}$	– Kompletní bipartitní graf na $m + n$ vrcholech
P_n	– Cesta na n vrcholech
C_n	– Cyklus na n vrcholech
$N(v)$	– Množina všech sousedních vrcholů vrcholu v
1-VMV	– 1-Vertex Magic Vertex
k	– Magická konstanta
EIT	– Vyrovnaný neúplný turnaj
$f(v)$	– ohodnocení vrcholu v
$V_1 \cap V_2$	– Průnik množin V_1 a V_2
$G \cup H$	– Sjednocení grafů G a H
\overline{G}	– Doplněk grafu G
$ecc(v)$	– Excentricita vrcholu v
$diam(G)$	– Průměr grafu G
$G[H]$	– Kompozice grafů G a H
$G \square H$	– Kartézský součin grafů G a H
$w_f(v)$	– Váha vrcholu v při ohodnocení f
$deg(v)$	– Stupeň vrcholu v
$\Delta(G)$	– Maximální stupeň v grafu G
$\delta(G)$	– Minimální stupeň v grafu G
C_G	– podgraf C_4 komponenty G

Obsah

1	Úvod	4
1.1	Pojmy a definice	5
1.2	Přehled výsledků	13
1.3	Další známé výsledky o pravidelných distance magic grafech	17
2	Hlavní výsledek	18
2.1	Konstrukce r -pravidelných distance magic grafů přidáním komponenty . . .	18
2.2	Sestavení souvislého grafu	23
2.3	Král turnaje a distance magic grafy	26
3	Závěr	33
4	Literatura	34

Seznam obrázků

1	Sedm mostů města Královce a jejich znázornění grafem	5
2	Graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $E = \{12, 14, 23, 34, 45\}$	5
3	Úplné grafy K_4 a K_5	6
4	Cykly C_3 a C_4	6
5	Cesta P_2 a P_3	6
6	Kompletní bipartitní graf $K_{2,3}$ a kompletní 3-partitní graf $K_{2,3,3}$	7
7	Cesta P_3 a bipartitní graf $K_{2,2}$ jako příklady distance magic ohodnocení s uvedenou magickou konstantou k	7
8	Distance magic graf C_4	8
9	3-pravidelný graf na šesti vrcholech.	8
10	Doplňek grafu G z obrázku 2.	9
11	Isomorfní grafy G a H	10
12	Automorfní graf G , ve kterém se zobrazí $f(u) = w$, $f(v) = x$, $f(w) = u$ a $f(x) = v$	10
13	Vlevo graf G jako příklad pravidelného grafu, který není vrcholově tranzitivní a vpravo graf H , který je pravidelný a zároveň vrcholově tranzitivní.	10
14	Znázornění grafu G , jeho indukovaného podgrafu H_1 a podgrafu H_2 , který není indukovaný.	11
15	Kompozice grafů $C_3[\overline{K_2}]$	12
16	Kartézský součin grafů $C_3 \square \overline{K_2}$	12
17	Orientovaný graf G s množinou hran $E = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 4)\}$	13
18	Zvýrazněný vrchol 1, který představuje krále v orientovaném grafu G	13
19	Distance magic graf $P_3 \cup 2C_4$ na 11 vrcholech, kde magická konstanta k je rovna počtu vrcholů grafu.	14
20	Distance magic graf $2C_4$ na 8 vrcholech, kde magická konstanta $k = 8 + 1$	14
21	Distance magic graf $K_{3,4}$, kde magická konstanta $k = 14$	15
22	Distance magic graf $K_2[C_4]$ s magickou konstantou $k = 27$	15
23	Distance magic graf $C_3[\overline{K_2}]$, kde magická konstanta $k = 14$	16
24	Distance magic graf $K_3[\overline{K_3}]$, kde magická konstanta $k = 30$	16
25	Interval hodnot vrcholů grafu G	20
26	Interval hodnot vrcholů komponent H a G , vyznačené modrou, respektive červenou barvou.	20
27	Graf G	21
28	Graf G a komponenta H	21
29	Graf $G \cup H$	22
30	Graf G a komponenta H	22
31	Graf $G \cup H$	23
32	Indukované cykly C_G a C_H	23
33	Hrany vedoucí mezi vrcholy obou komponent.	24
34	Komponenty G a H se zvýrazněnými cykly C_G a C_H	24

35	Cykly C_4 komponent G a H	24
36	Souvislý graf $G \cup H$	25
37	Komponenty G a H se zvýrazněnými cykly C_G a C_H	25
38	Cykly C_4 komponent G a H	25
39	Souvislý graf $G \cup H$	26
40	Petersonův graf P	28
41	Distance magic graf $P[\overline{K}_2]$	28
42	3-pravidelný graf G na 10 vrcholech s uvedenými excentricitami, kde červeně vyznačené vrcholy mají stejnou šanci stát se králem.	29
43	Distance magic graf $G[\overline{K}_2]$	29
44	Graf $G \cup H$, kde komponenty G a H jsou kompletní grafy K_4	30
45	Graf I na 8 vrcholech.	30
46	Distance magic graf I' na 16-ti vrcholech, kde magická konstanta $k = 68$, a jehož průměr 2.	31
47	Výše graf I_1 , kde excentricita každého vrcholu je 3. Níže graf I_2 , jehož průměr již je 2.	31
48	6-pravidelný distance magic graf I'_2 na 16 vrcholech, kde každý vrchol má šanci stát se králem.	32

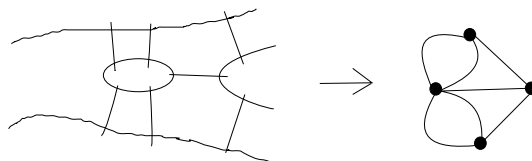
1 Úvod

Tato práce zabývající se problematikou magického ohodnocení grafů vznikala souběžně s prací mého spolužáka Matěje Krbečka z téže oblasti [8]. Zatímco pan Krbeček ve své práci mj. přináší nové výsledky, které se týkají 14-pravidelných 1-VMV grafů, já jsem se zaměřil na popis nové konstrukce 1-VMV grafů, kde hlavním cílem mého snažení bylo zdokonalení výsledného 1-VMV grafu, který byl vytvořen právě touto novou konstrukcí, to vše bude obsahem kapitoly 2.

Na úvod bych ještě rád dodal, že mé první seznámení se s problematikou 1-VMV ohodnocení grafů bylo prostřednictvím práce Adama Silbera [12], jedinou doposud česky psanou prací na toto téma. Z české literatury mi další oporou při tvorbě této práce byla skriptta teorie grafů od Petra Kováře [4], některé definice uvedené v podkapitole 1.1, pocházejí právě odsud.

1.1 Pojmy a definice

Abychom se mohli věnovat magickým ohodnocením grafů, je třeba nejprve nadefinovat základní pojmy týkající se grafů obecně, význam slova *graf*. Graf představuje znázornění nějakého problému, díky tomu lze daný problém jednodušeji řešit. Zkoumáním grafů se zabývá matematická disciplína zvaná *Teorie grafů*, za jejíhož zakladatele je považován známý matematik *Leonhard Euler*. Euler pomocí grafu vyřešil problém *Sedm mostů města Královce*, který zněl: „je možno přejít všechny mosty tak, aby na každý most ten, kdo se o to pokouší, vstoupil pouze jednou?“ Euler si každý břeh představil jako vrchol a mosty jako hrany grafu.



Obrázek 1: Sedm mostů města Královce a jejich znázornění grafem

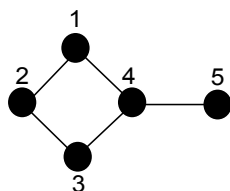
Pro zajímavost poté dokázal, že to není možné, neboť daný graf nelze nakreslit jedním tahem.

Protože tato práce se zabývá využitím takzvaných „magicky ohodnocených“ grafů při sportovních turnajích, můžeme si zde vrcholy grafu představit jako hráče (týmy) a jednotlivé hrany vzájemné utkání mezi nimi. Nyní ale přejděme k matematické definici grafu, která zní následovně.

Definice 1.1. *Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran.*

Označení množiny vrcholů a hran vychází z počátečních písmen anglických názvů pro vrcholy (vertices) a hrany (edges). Prvky množiny V budeme značit přirozenými čísly, hrana mezi nimi představuje množinu o dvou prvcích (vrcholech, mezi kterými daná hrana vede), například $\{1, 2\}$, zkráceně zapisujeme 12.

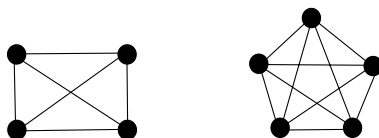
Poznámka 1.1. *V některých oborech je mezi přirozené číslo považovaná i nula, pokud však my v této práci mluvíme o přirozených číslech, myslíme tím celá kladná čísla.*



Obrázek 2: Graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $E = \{12, 14, 23, 34, 45\}$.

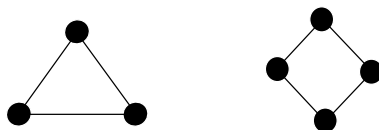
Existuje mnoho druhů grafů, které se vyskytují tak často, že mají i své názvy. Nyní uvedeme ty nejzákladnější z nich.

První skupinu grafů nazveme *úplné (kompletní) grafy* na n vrcholech K_n , kde $n \geq 1$. Je to graf, jehož každé dva vrcholy jsou spojeny hranou a kde počet hran $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$.



Obrázek 3: Úplné grafy K_4 a K_5 .

Grafy na n vrcholech, kde $n \geq 3$, nazveme *cykly (kružnice)*, pokud jsou tyto vrcholy spojeny n hranami do jednoho cyklu. Cyklus budeme značit symbolem C_n .



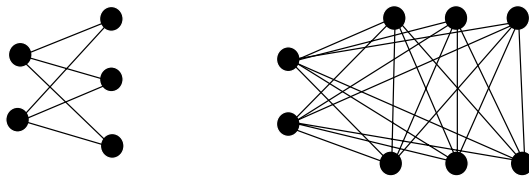
Obrázek 4: Cykly C_3 a C_4 .

Cestou na n vrcholech P_n , kde $n \geq 1$, nazveme graf, jehož vrcholy jsou v řadě za sebou propojeny $n - 1$ hranami. Formálně cestu můžeme chápat jako posloupnost vrcholů, mezi nimiž vede hrana, ale žádné vrcholy (a tedy ani hrany mezi nimi) se neopakují.



Obrázek 5: Cesta P_2 a P_3 .

Kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m \geq 1$ a $n \geq 1$, je graf, jehož vrcholy jsou rozděleny na dvě disjunktní množiny (partity), kde hrany vedou mezi všemi vrcholy nepatřící do stejné množiny a kde počet hran $|E| = mn$. Podobně můžeme definovat *multipartitní graf*. Tedy obecně kompletním k -partitním grafem, kde $k \geq 2$, míníme graf, jehož vrcholy jsou rozděleny do k disjunktních množin, kde hrany vedou mezi vrcholy nepatřící do jedné množiny.



Obrázek 6: Kompletní bipartitní graf $K_{2,3}$ a kompletní 3-partitní graf $K_{2,3,3}$.

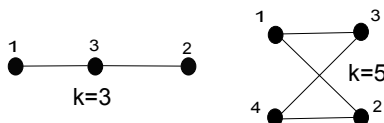
Když už máme představu, co si pod slovem *graf* představit, zaměříme se nyní na pojem „magické ohodnocení“, který jako první uvedl v roce 1963 J. Sedláček [11]. Zde to bude konkrétně 1-VMV (*1-Vertex Magic Vertex*, česky *1-vrcholově magické vrcholové*) ohodnocení, známé také pod názvem *distance magic* ohodnocení, který zavedli Miller, Rodger a Simanjuntak v článku [9].

Poznámka 1.2. *Právě druhý zmíněný pojem distance magic budeme v tomto textu používat, bez skloňování a s výslovností „distanc medžig“. Protože dostupná literatura je jen v angličtině, tak jsme se rozhodli termín nepřekládat.*

Ohodnotit vrcholy grafu znamená přiřadit vrcholům hodnoty z množiny přirozených čísel. Tyto hodnoty můžou pro představu vyjadřovat sílu jednotlivých týmů. Ohodnotit vrcholy tak, aby graf byl distance magic znamená vrcholům grafu přiřadit takové hodnoty, že součet ohodnocení sousedních vrcholů bude pro všechny vrcholy stejný. Sousední vrcholy definujeme jako vrcholy mezi nimiž vede hrana. Například sousední vrcholy vrcholu označeného na obrázku 2 číslem 1 jsou vrcholy 2 a 4.

Obecně množinu všech sousedních vrcholů nějakého vrcholu v budeme značit symbolem $N(v)$. Matematicky můžeme tedy distance magic ohodnocení definovat takto.

Definice 1.2. *Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech. Bijekce $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se nazývá distance magic ohodnocení grafu G , jestliže existuje celé číslo k takové, že $\sum_{u \in N(v)} f(u) = k$ pro všechny $v \in V$. Konstanta k se nazývá magická konstanta ohodnocení f .*



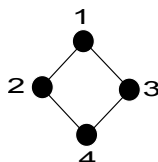
Obrázek 7: Cesta P_3 a bipartitní graf $K_{2,2}$ jako příklady distance magic ohodnocení s uvedenou magickou konstantou k .

V řeči turnajů jde o to, aby součet síly protivníků, se kterými se daný tým utká, byl pro všechny týmy stejný. Takový turnaj se pak nazývá *Vyrovnaný nekompletní turnaj*, zkráceně EIT (z anglického názvu *Equalized incomplete tournament*). Je tedy zřejmé, že distance magic ohodnocení nelze použít u úplných turnajů n týmů, které jsou modelovány

kompletními grafy K_n , pokud $n > 1$.

V dřívější části textu jsme uvedli některé základní typy grafů-kompletní graf, cyklus, cesta a multipartitní graf. V článku [9] bylo dokázáno, na jakém počtu vrcholů tyto grafy mohou být distance magic:

- Kompletní graf K_n je distance magic graf právě tehdy, je-li $n = 1$,
- Cyklus C_n délky n je distance magic graf právě tehdy, je-li $n = 4$,



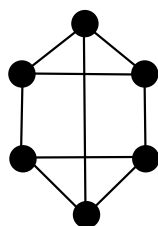
Obrázek 8: Distance magic graf C_4 .

Poznámka 1.3. Můžeme si všimnout, že graf C_4 je vlastně jinak zakreslený kompletní bipartitní graf $K_{2,2}$ z obrázku 7.

- Cesta P_n je distance magic graf právě tehdy, je-li $n = 1$ nebo $n = 3$ (viz obrázek 7),
- Kompletní m -partitní graf, kde každá partita je tvořena n vrcholy, pro $m, n \geq 2$, je distance magic právě tehdy, je-li n sudé číslo nebo n a zároveň m jsou lichá čísla.

Poznámka 1.4. Další známé výsledky pro existenci distance magic grafů uvádíme v podkapitolách 1.2 a 1.3.

Důležitým pojem, který nyní zavedeme je *stupeň vrcholu*. Stupeň vrcholu vyjadřuje počet hran, se kterými je daný vrchol *incidentní*. Vrchol v je incidentní s hranou uv , jestliže je jejím koncovým vrcholem, tedy $v \in uv$. Stupeň vrcholu v v nějakém grafu G budeme značit $\deg(v)$ (z anglického *degree*), kde největší stupeň vrcholu v grafu G označujeme $\Delta(G)$, nejmenší stupeň značíme $\delta(G)$. Grafy se všemi vrcholy stejného stupně pak nazýváme *pravidelné grafy*.



Obrázek 9: 3-pravidelný graf na šesti vrcholech.

Obecně, pokud je daný graf r -pravidelný, pak jeho všechny vrcholy jsou stupně r . Pokud si opět představíme vrcholy grafu jako hráče, a jednotlivé hrany jako vzájemná

utkání mezi nimi, tak pravidelnost nám říká, že se každý tým utká se stejným počtem soupeřů. V případě r -pravidelného grafu každý hráč odehraje r zápasů.

Věta 1.1. *Součet stupňů v grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran. Tedy $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$.*

Důkaz Věty 1.1 je triviální, jestliže z daného vrcholu vede hrana, pak musí v dalším vrcholu také končit. Proto součet stupňů je vždy sudý a roven dvojnásobku počtu hran.

V souvislosti se stupni byla v článku [9] dokázána nutná podmínka pro existenci distance magic ohodnocení.

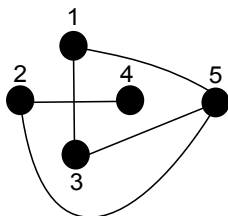
Věta 1.2. *Nutná podmínka pro existenci distance magic ohodnocení f grafu G na n vrcholech je $kn = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)f(v)$.*

Abychom mohli popsat, zda je graf distance magic, zavedeme termín *váha vrcholu*. Váha nějakého vrcholu v nám dává hodnotu součtu ohodnocení jeho sousedních vrcholů. Váhu vrcholu v ohodnocení f budeme značit $w_f(v)$. Matematicky zapsáno $w_f(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$. Pokud bude váha shodná pro každý vrchol grafu, pak je tento graf distance magic.

Pro konstrukci distance magic grafů, které se budeme věnovat v kapitole 2, bude třeba zavést následující pojmy.

Řekneme, že dva grafy $G = (V_1, E_1)$ a $H = (V_2, E_2)$ jsou *disjunktní*, jestliže $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Sjednocení těchto grafů pak značíme $G \cup H$, kde $G \cup H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

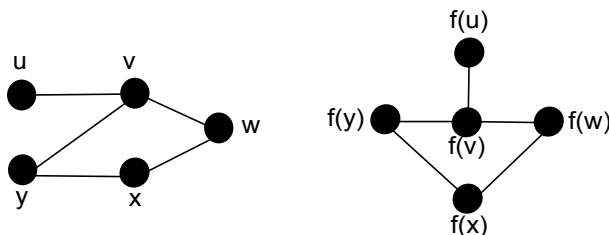
Definice 1.3. *Doplňěk grafu G je graf \overline{G} , který obsahuje právě ty hrany, které neobsahuje graf původní.*



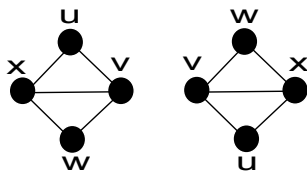
Obrázek 10: Doplněk grafu G z obrázku 2.

Poznámka 1.5. *Z definice je zřejmé, že například doplněk kompletního grafu $\overline{K_n}$ bude graf, který nebude obsahovat žádné hrany.*

Graf je možné nakreslit různými způsoby. Jako příklad můžeme uvést již zmíněný cyklus C_4 a bipartitní graf $K_{2,2}$. Takovým grafům pak říkáme, že jsou *isomorfní*. Matematicky isomorfismus dvou grafů $G = (V_1, E_1)$ a $H = (V_2, E_2)$ definujeme jako bijektivní zobrazení $f : V_1 \rightarrow V_2$, kde každé dva vrcholy $u, v \in V_1$ jsou spojeny hranou v G právě tehdy, když $f(u), f(v) \in V_2$ jsou spojeny hranou v H . Jiný příklad isomorfních grafů můžeme vidět na následujícím obrázku.

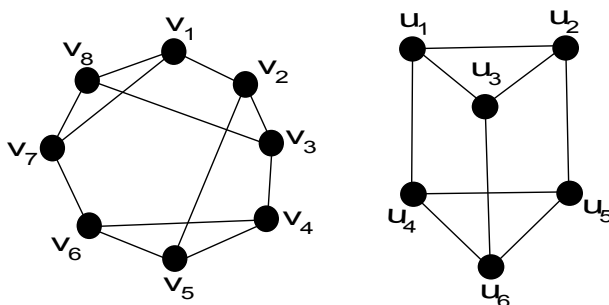
Obrázek 11: Isomorfní grafy G a H .

Automorfismus grafu G definujeme jako bijekci $f : V(G) \rightarrow V(G)$ a dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou spojeny hranou, právě tehdy, když $f(u), f(v) \in V(G)$ jsou spojeny hranou. Zjednodušeně řečeno, automorfní graf je isomorfní graf sám se sebou.

Obrázek 12: Automorfní graf G , ve kterém se zobrazí $f(u) = w$, $f(v) = x$, $f(w) = u$ a $f(x) = v$.

Definice 1.4. Řekneme, že graf G je vrcholově tranzitivní, jestliže pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje automorfismus φ , že $\varphi(u) = v$.

Vrcholově tranzitivní nemůže být graf, který není pravidelný (ne každý vrchol má stejný stupeň). Ovšem také neplatí, že každý pravidelný graf je vrcholově tranzitivní, jak se můžeme přesvědčit na následujícím obrázku.

Obrázek 13: Vlevo graf G jako příklad pravidelného grafu, který není vrcholově tranzitivní a vpravo graf H , který je pravidelný a zároveň vrcholově tranzitivní.

Graf G na obrázku 13 není vrcholově tranzitivní, protože například v_8 leží v cyklu

$v_1v_7v_8$, ale v_3 ne, protože mezi žádnými jeho sousedními vrcholy nevede hrana.

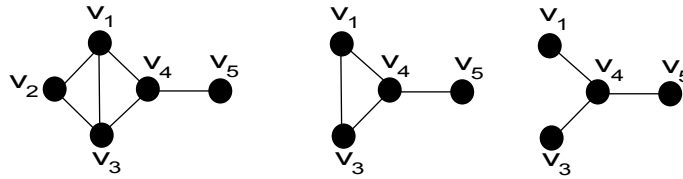
Následující pojmy se budou týkat vzdálenosti mezi dvěma vrcholy grafu G , kde *vzdálenost* mezi dvěma vrcholy definujeme jako délku nejkratší cesty mezi nimi.

Definice 1.5. *Excentricita vrcholu v v grafu G je největší vzdálenost v od ostatních vrcholů v G . Excentricitu vrcholu v budeme značit $\text{ecc}(v)$.*

Například excentricita každého vrcholu v bipartitním grafu $K_{m,n}$ je 2, pokud $m, n \geq 1$. Průměr grafu G je největší excentricita v grafu G . Průměr grafu G se značí $\text{diam}(G)$ (z anglického *diameter*). Cesta P_n je příklad grafu, jehož průměr $\text{diam}(P_n) = n - 1$.

Dále zavedeme pojmy *souvislost*, *podgraf* a *komponenta* grafu. Řekneme, že graf je souvislý, jestliže existuje *cesta* mezi každou dvojicí vrcholů grafu. Připomeňme, že cesta je definovaná jako posloupnost vrcholů a hran, které se neopakují.

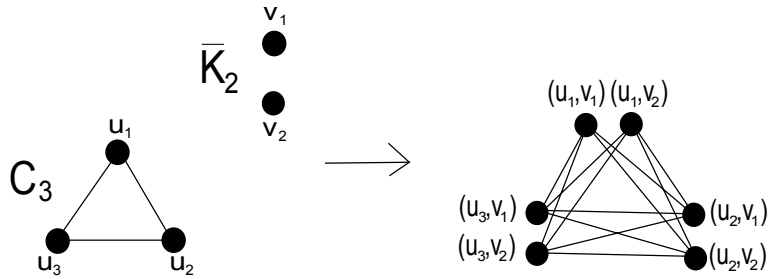
Podgrafem P grafu G nazýváme graf, který vznikne odstraněním vrcholů (a hran, které jsou s těmito vrcholy incidentní), případně odstraněním dalších hran původního grafu G . Pokud vynecháme pouze hrany, které byly incidentní s vynechanými vrcholy, pak takový podgraf nazveme *indukovaný*. Oba typy podgrafů spolu s původním grafem G znázorňuje následující obrázek.



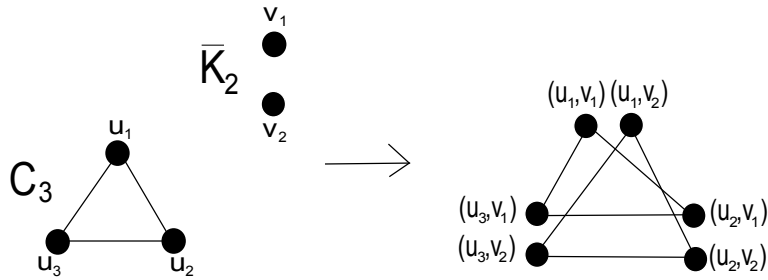
Obrázek 14: Znázornění grafu G , jeho indukovaného podgrafu H_1 a podgrafu H_2 , který není indukovaný.

Komponentu můžeme definovat jako maximální souvislý podgraf grafu G . Z toho plyne, že pokud je graf souvislý, pak má jedinou komponentu.

Kompozice (složení) grafů G a H je graf, který má vrcholovou množinu $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u_1, v_1) a (u_2, v_2) jsou spojeny hranou právě když platí $u_1 = u_2$ a zároveň $v_1v_2 \in E(H)$ nebo $u_1u_2 \in E(G)$. Kompozici grafů G a H v tomto pořadí budeme značit $G[H]$. Na následujícím obrázku je znázorněn příklad sestavení kompozice grafů G a H pro $G = C_3$ a $H = \overline{K}_2$.

Obrázek 15: Kompozice grafů $C_3[\overline{K_2}]$.

Kartézský součin dvou grafů G a H je graf, který má vrcholovou množinu $V(G) \times V(H)$ a dva vrcholy (u_1, v_1) a (u_2, v_2) jsou spojeny právě když platí $u_1 = u_2$ a zároveň $v_1 v_2 \in E(H)$ nebo $v_1 = v_2$ a zároveň $u_1 u_2 \in E(G)$. Kartézský součin grafů G a H budeme značit $G \square H$.

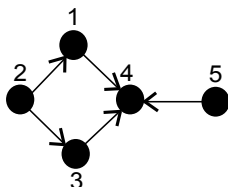
Obrázek 16: Kartézský součin grafů $C_3 \square \overline{K_2}$.

Poznámka 1.6. *Kartézský součin je komutativní operace ($G \square H = H \square G$). Kompozice grafů komutativní obecně není ($G[H] \neq H[G]$).*

Dosud jsme v této práci mluvili o grafech, jejichž vrcholy byly spojeny hranou tak, že jsme nerozlišovali, jestli hrana vede z vrcholu v_1 do vrcholu v_2 nebo naopak. Pro určité situace je ovšem užitečné stanovit směr hrany – například pro znázornění silnic s jednosměrkami či směr toku proudu vody v řekách či potocích, které se do nich vlévají. Tyto problémy pak můžeme zakreslit pomocí takzvaných *orientovaných grafů*. Orientovaný graf definujeme takto.

Definice 1.6. *Orientovaný graf G je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je podmnožina kartézského součinu $V \times V$.*

Hrany v orientovaném grafu budeme znázorňovat šipkami, kde šipku vedoucí například z vrcholu v_1 do vrcholu v_2 značíme (v_1, v_2) . Příklad orientovaného grafu můžeme vidět na obrázku 17.



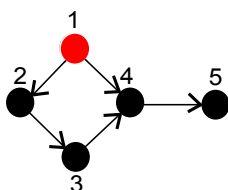
Obrázek 17: Orientovaný graf G s množinou hran $E = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 4)\}$.

Vraťme se zpět k popisu problémů pomocí orientovaných grafů. Vezměme si nyní turnajovou problematiku. Představme si, že některá utkání turnaje jsou již odehrána a my je chceme zakreslit právě pomocí orientovaného grafů (například z důvodu zkoumání či lepší představy). Dále předpokládejme, že v daném utkání nemůže nastat remíza, tedy vždy nějaký tým (hráč) musí z tohoto utkání vyjít vítězně (například tenis nebo volejbal). Pak, jestliže hráč v_1 porazí hráče v_2 , tuto situaci v grafu zakreslíme šipkou (v_1, v_2) , což je orientovaná hrana vedoucí z vrcholu v_1 do vrcholu v_2 . Pokud by graf na obrázku 17 znázorňoval nějakou část odehraného turnaje, můžeme z dané situace usoudit, že hráč číslo 4 má zatím jasně nejhorší bilanci – prohrál všechny své zápasy.

Nyní se zaměříme na jednotlivé hráče a utkání odehrané mezi nimi. Chceme zjistit, zda daný hráč může být *králem*. Krále turnaje definujeme následujícím způsobem.

Definice 1.7. Vrchol u je králem v orientovaném grafu G , jestliže každý jiný vrchol v je dosažitelný z u po nějaké orientované cestě délky nejvýše 2.

Pokud bychom se opět zaměřili na obrázek 17 zjistíme, že se zde žádný král nenachází, hráče 2 ani hráče 5 neporazil nikdo. Jestliže ale v tomto grafu pozměníme orientaci některých hran, pak už zde krále nalezneme, jak lze vidět na následujícím obrázku.



Obrázek 18: Zvýrazněný vrchol 1, který představuje krále v orientovaném grafu G .

Právě na hledání krále v distance magic grafech se, mimo jiné, zaměříme v kapitole 2.

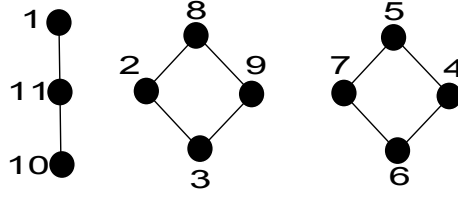
1.2 Přehled výsledků

V této části uvedeme některé známé výsledky zaměřené na existenci či neexistenci distance magic grafů. Ty pocházejí z přehledového článku, který sepsali Arumugam, Fronček a

Kamatchi [1]. Zde navíc některá tvrzení pro lepší představu znázorníme obrázky.

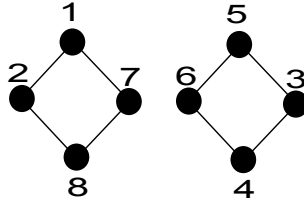
Věta 1.3. *Jestliže G je netriviální distance magic graf a $\delta(G) = 1$, pak buď G je isomorfní s P_3 nebo G obsahuje jednu komponentu isomorfní s P_3 a ostatní komponenty isomorfní s $K_{2,2} = C_4$. Magická konstanta k je pak rovna počtu vrcholů grafu G .*

Z Věty 1.3 vyplývá, že graf G je tedy buď cesta P_3 s magickou konstantou $k = 3$ nebo $P_3 \cup tC_4$, kde magická konstanta $k = 4t + 3$, pro $t \geq 1$. Následující obrázek představuje situaci, kdy $t = 2$.



Obrázek 19: Distance magic graf $P_3 \cup 2C_4$ na 11 vrcholech, kde magická konstanta k je rovna počtu vrcholů grafu.

Věta 1.4. *Graf G na n vrcholech je distance magic s magickou konstantou $k = n + 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $G = tC_4$, kde t je přirozené číslo.*



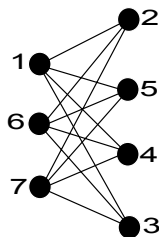
Obrázek 20: Distance magic graf $2C_4$ na 8 vrcholech, kde magická konstanta $k = 8 + 1$.

Díky následující větě můžeme potvrdit nebo vyvrátit možnost distance magic ohodnocení u kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$.

Věta 1.5. *Nechť m a n jsou dvě přirozená čísla tak, že $m \leq n$. Graf $K_{m,n}$ je distance magic tehdy a jen tehdy, platí-li následující podmínky*

1. $m + n \equiv 0$ nebo $3 \pmod{4}$ a
2. buď $n \leq \lfloor (1 + \sqrt{2})m \rfloor$ nebo $2(2n + 1)^2 - (2m + 2n + 1)^2 = 1$.

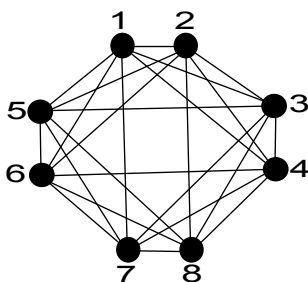
Důležité je, aby obě podmínky platili zároveň. Například graf $K_{1,3}$ má sice splnění podmínku 1, ale žádnou z podmínek 2, takže nemůže být distance magic. Oproti tomu třeba kompletní bipartitní graf $K_{3,4}$ již má splněny obě podmínky. O jeho „magičnosti“ se můžeme přesvědčit na následujícím obrázku.



Obrázek 21: Distance magic graf $K_{3,4}$, kde magická konstanta $k = 14$.

Věta 1.6. *Jestliže G je kompletní multipartitní graf, který je distance magic, pak $G = K_{s_1, s_2, \dots, s_r}$, kde $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_r$ a zároveň $s_i \geq 2$, pro $i = 2, 3, \dots, r$.*

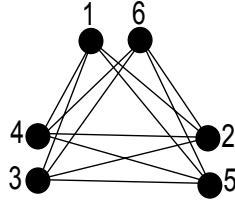
Věta 1.7. *Nechť G je r -pravidelný graf, kde $r \geq 1$, a nechť C_n je cyklus tvořený n vrcholy, kde $n \geq 3$. Pak $G[C_n]$ je distance magic tehdy a jenom tehdy, je-li $n = 4$.*



Obrázek 22: Distance magic graf $K_2[C_4]$ s magickou konstantou $k = 27$.

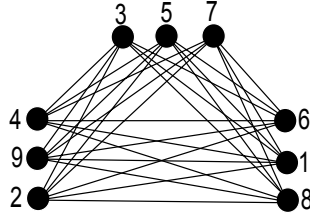
Věta 1.8. *Nechť G je libovolný pravidelný graf. Pak $G[\overline{K_n}]$ je distance magic pro každé sudé n .*

Věta 1.8 byla dokázána v článku [5]. Díky ní máme možnost konstruovat pravidelné distance magic grafy na teoreticky nekonečně mnoha vrcholech n , kde n je sudé. Tuto konstrukci už jsme také zmínili při definici kompozice (viz obrázek 15) a budeme ji využívat i v následující kapitole.



Obrázek 23: Distance magic graf $C_3[\overline{K_2}]$, kde magická konstanta $k = 14$.

V článku [3] bylo dokázáno, že pokud G je libovolný r -pravidelný graf na k vrcholech, kde k je liché, a $\overline{K_n}$ je doplněk kompletního grafu na n vrcholech, kde n je také liché číslo, pak r je sudé a graf $G[\overline{K_n}]$ je distance magic. Kompozici 2-pravidelného grafu na třech vrcholech $C_3 = K_3$ s doplňkem $\overline{C_3} = \overline{K_3}$ můžeme vidět na obrázku 24.



Obrázek 24: Distance magic graf $K_3[\overline{K_3}]$, kde magická konstanta $k = 30$.

Věta 1.9. [2] Graf $G[\overline{K_n}]$, kde G je r -pravidelný graf na k vrcholech, nemůže být distance magic, je-li n liché a $k \equiv r \equiv 2 \pmod{4}$.

Věta 1.10. Jestliže n je sudé nebo mnp je liché, $m \geq 1, n > 1$ a $p > 1$, pak $mK_p[\overline{K_n}]$ má distance magic ohodnocení.

Věta 1.11. Graf $mK_p[\overline{K_n}]$ nemůže být distance magic, pokud np je liché, $p \equiv 1$ nebo $3 \pmod{4}$ a m je sudé.

Graf $G \square H$, tedy kartézský součin grafů G a H , je distance magic pouze v tomto případě.

Věta 1.12. [10] Nechť G je cyklus na n vrcholech C_n a nechť H je cyklus na k vrcholech C_k . Pak $C_n \square C_k$, pro $n, k \geq 3$ je distance magic tehdy a jenom tehdy, je-li $n = k \equiv 2 \pmod{4}$.

Z Věty 1.12 vyplývá, že počet vrcholů obou cyklů musí být stejný a zároveň počet vrcholů musí dát zbytek 2 po dělení čtyřmi, aby graf $C_n \square C_k$ byl distance magic. Nejmenší graf, jenž tyto podmínky splňuje, je kartézský součin dvou cyklů C_6 , tedy 4-pravidelný graf na 36 vrcholech!

1.3 Další známé výsledky o pravidelných distance magic grafech

Pokud budeme mít r -pravidelný graf, který je distance magic, pak můžeme plánovat turnaj, kde každý hráč odehraje právě r zápasů a ve výsledném součtu s protivníky se stejnou silou.

Navíc, pokud známe pravidelnost a počet vrcholů daného grafu, můžeme určit magickou konstantu, jak je uvedeno v článku [9], takto.

Věta 1.13. *Nechť G je r -pravidelný distance magic graf na n vrcholech. Pak magická konstanta v distance magic ohodnocení $k = \frac{r(n+1)}{2}$.*

Důkaz. Stupeň každého vrcholu v r -pravidelném grafu je r . Dle Věty 1.2 je $kn = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)f(v) = r \sum_{i=1}^n i = r \frac{n(n+1)}{2}$. Po vydělení počtem vrcholů dostaneme $k = \frac{r(n+1)}{2}$. \square

Bohužel ne pro všechna r nějaký r -pravidelný distance magic graf existuje. V článku [9] ještě bylo dokázáno následující tvrzení.

Věta 1.14. *Žádný r -pravidelný graf, kde r je liché, nemůže být distance magic.*

Z Věty 1.1 plyne, že r -pravidelné grafy, kde r je liché, existují jen na sudém počtu vrcholů. Magická konstanta k je ale celé číslo, což by v grafu na sudém počtu vrcholů nebylo splněno. Z tohoto důvodu neexistují distance magic grafy s lichou pravidelností. Nyní se zbývá zaměřit na počet vrcholů n daného r -pravidelného grafu, tj. pro která n existuje r -pravidelný distance magic graf. V článku [2] bylo ukázáno následující.

Věta 1.15. *Pro n sudé existuje r -pravidelný distance magic graf tehdy a jen tehdy, je-li $2 \leq r \leq n-2$, $r \equiv 0 \pmod{2}$ a buď $n \equiv 0 \pmod{4}$ nebo $n \equiv r+2 \equiv 2 \pmod{4}$.*

Z Věty 1.15 plyne, že pokud je $n \equiv 0 \pmod{4}$, pak distance magic graf existuje, je-li $r \leq n-2$, pokud n dělitelné 4 beze zbytku není, pak distance magic graf existuje tehdy a jenom tehdy, je-li $r \equiv 0 \pmod{4}$.

Pro pravidelné grafy na lichém počtu vrcholů je to složitější. Zatím není znám způsob, jak obecně popsat existenci pravidelného distance magic grafu lichého řádu. Pro 2-pravidelné grafy řádu n , kde n je liché, však distance magic ohodnocení neexistuje.

Důkaz. Magická konstanta je v tomto případě $k = \frac{2(n+1)}{2} = n+1$. Z Věty 1.4 však plyne, že distance magic graf G s magickou konstantou $k = n+1$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li $G = tC_4$. \square

Pro některé vyšší pravidelnosti však už byla tato existence dokázána, konkrétně pro 4-pravidelné v článku [5] a pro (6, 8, 10, 12)-pravidelné v článku [6]. Výsledky jsou následující.

Věta 1.16. *4-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \geq 17$.*

Věta 1.17. 6-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n = 9$ nebo $n \geq 13$.

Věta 1.18. 8-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \geq 15$.

Věta 1.19. 10-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \geq 15$.

Věta 1.20. 12-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \geq 15$.

Navíc v práci mého kolegy Matěje Krbečka je dokázáno, že 14-pravidelný distance magic graf na lichém počtu vrcholů n existuje tehdy a jen tehdy, je-li $n \geq 19$ [8].

Po shrnutí těchto podmínek, které jsou nutné pro existenci distance magic grafu, přejdeme do hlavní kapitoly, která se bude skládat ze tří částí.

V první části popíšeme novou konstrukci distance magic grafů pomocí přidání komponenty, která byla uvedena v článku, jehož autory jsou Petr Kovář a Adam Silber [7].

Druhá část bude věnována způsobu spojení nespojitelného grafu, který vznikl právě touto konstrukcí, a zároveň zachování možnosti distance magic ohodnocení výsledného souvislého grafu G .

V poslední části pak načneme problém možnosti existence krále turnaje ve vyronaném neúplném turnaji, jenž bude dále rozvíjen v dalších publikacích.

2 Hlavní výsledek

2.1 Konstrukce r -pravidelných distance magic grafů přidáním komponenty

Následující tvrzení bylo již dokázáno v článku [7]. V této práci poskytneme alternativní důkaz. V další části pak konstrukci rozšíříme tak, abychom uměli sestavit souvislý graf s danými parametry.

Věta 2.1. *Nechť G je distance magic graf na n vrcholech, který je r -pravidelný. Pak umíme sestavit r -pravidelný graf $G \cup H$ na $n + m$ vrcholech, který je distance magic pro sudé $m \geq r + 2$, kde m je počet vrcholů komponenty H . Pro $r \equiv 0 \pmod{4}$ je m sudé. Pro $r \equiv 2 \pmod{4}$ je $m \equiv 0 \pmod{4}$.*

Pro $m = r + 2$ komponenta H vznikne kompozicí grafů $K_{\frac{m}{2}}$ a $\overline{K_2}$, značíme $K_{\frac{m}{2}}[\overline{K_2}]$. Pro $m > r + 2$ komponenta H vznikne kompozicí nějakého $\frac{r}{2}$ -pravidelného grafu na $\frac{m}{2}$ vrcholech (označme tento graf jako F) a doplňku úplného grafu na dvou vrcholech $\overline{K_2}$, tedy $H = F[\overline{K_2}]$.

Poznámka 2.1. *Je třeba dát pozor, aby graf F byl definovaný. Pokud by jeho pravidelnost měla být lichá a zároveň byl lichý i počet vrcholů, tak F neexistuje, neboť součet stupňů vrcholů grafu je vždy sudý podle principu sudosti.*

Konstrukce r -pravidelného distance magic grafu pomocí přidání komponenty H probíhá následujícím způsobem.

Poznámka 2.2. Ohodnocení grafu $G \cup H$ budeme značit f' .

Poznámka 2.3. Magickou konstantu grafu $G \cup H$ v ohodnocení f' budeme značit k' .

Konstrukce

- K distance magic grafu G na n vrcholech přidáme komponentu H na m vrcholech, kde $m \geq r+2$, m je sudé pro $r \equiv 0 \pmod{4}$ nebo $m \equiv 0 \pmod{4}$ pro $r \equiv 2 \pmod{4}$, a kde vrcholy H jsou tvořeny partitami $\{x_i, y_i\}$ pro $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$.
- komponenta H je r -pravidelný (pro $m = r+2$ dokonce kompletní $K_{\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{\frac{m}{2}}}$) multipartitní graf, kde hrany vedou mezi vrcholy, které leží v různých partitách tak, že počet hran vedoucích z každého vrcholu je r a součet ohodnocení sousedních vrcholů každého vrcholu je k ,
- ohodnotíme vrcholy podle následujícího předpisu

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) + \frac{m}{2} & \text{pro } v \in V(G), \\ i & \text{pro } x_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ m + n + 1 - i & \text{pro } y_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

- vznikne nový graf $G \cup H$, který je r -pravidelný a distance magic, kde magická konstanta $k' = \frac{r(m+n+1)}{2}$

Nyní dokážeme tvrzení Věty 2.1.

Věta 2.1 říká, že pokud budeme mít r -pravidelný distance magic graf G na n vrcholech, pak po přidání komponenty H na $m \geq r+2$ vrcholech, kde m je sudé pokud $r \equiv 0 \pmod{4}$, pro $r \equiv 2 \pmod{4}$ je $m \equiv 0 \pmod{4}$, umíme sestavit r -pravidelný graf $G \cup H$ na $n+m$ vrcholech, který je také distance magic.

Důkaz se bude skládat ze tří částí.

V první části dokážeme, že váhy vrcholů grafu $G \cup H$ jsou shodné, tedy že $G \cup H$ má distance magic ohodnocení.

V druhé části důkazu ukážeme, že komponenta H má stejnou pravidelnost jako komponenta G , tudíž výsledný graf $G \cup H$ je pravidelný.

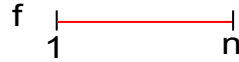
V třetí části se přesvědčíme, že i po přeznačení vrcholů obou komponent bude mít každý vrchol jinou hodnotu.

Důkaz shodných vah. Víme, že graf G je distance magic, ohodnocení každého jeho vrcholu v je $f(v) = i$, pro $i = 1, 2, \dots, n$. Váha každého vrcholu grafu G je tedy rovna magické konstantě k , neboli $w_f(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u) = k$.

Po přidání komponenty H se všechna ohodnocení vrcholů komponenty G zvýší o stejnou hodnotu, tedy $f'(v) = f(v) + \frac{m}{2}$, pro $v \in V(G)$. Váha každého vrcholu v v novém ohodnocení f' komponenty G bude $w_{f'}(v) = \sum_{u \in N(v)} f'(u) = \sum_{u \in N(v)} \left(f(u) + \frac{m}{2}\right) = \sum_{u \in N(v)} f(u) + r \frac{m}{2} = k + r \frac{m}{2} = \frac{r(n+1)}{2} + \frac{rm}{2} = \frac{r(m+n+1)}{2}$. Víme také, že komponenta H je tvořena $\frac{m}{2}$ partitami každá o dvou vrcholech $\{x_i, y_i\}$, kde hrany vedou z každého vrcholu do $\frac{r}{2}$ partit tak, aby každý vrchol byl stupně r . Váha vrcholu x_i a y_i proto bude stejná, tedy $w_{f'}(x_i) = w_{f'}(y_i) = \frac{r(f'(x_i) + f'(y_i))}{2} = \frac{r(i+m+n+1-i)}{2} = \frac{r(m+n+1)}{2}$, kde $(f'(x_i) + f'(y_i))$ je součet každé partity komponenty H . Váhy vrcholů komponent G a H jsou tedy totožné.

Důkaz pravidelnosti. Komponenta H je stejně pravidelná jako komponenta G . Uvědomíme-li si, že z každé partity komponenty H vedou dvě hrany do $\frac{r}{2}$ partit, dostaneme vztah pro stupeň vrcholu v komponentě H $2 \frac{r}{2} = r$. Pravidelnost komponenty G zůstane r .

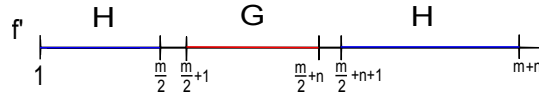
Důkaz bijektivnosti f' . K dokázání toho, že každý vrchol bude mít po přeznačení jedinečnou hodnotu, využijeme jednoduchých znázornění intervalu daných hodnot. Graf G na n vrcholech má původní ohodnocení f vrcholů celočíselnými hodnotami z intervalu $[1, n]$, každý vrchol je ohodnocen právě jednou hodnotou z tohoto intervalu.



Obrázek 25: Interval hodnot vrcholů grafu G .

Po přeznačení vrcholů dle funkce $f'(v)$ se stávající hodnoty každého vrcholu komponenty G zvýší o $\frac{m}{2}$, prvních $\frac{m}{2}$ hodnot, tedy hodnot z intervalu $[1, \frac{m}{2}]$, případně vždy vrcholům x_i , pro $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$ dle předpisu f' , hodnoty vrcholů komponenty G budou poté zřejmě z intervalu $[\frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + n]$.

Nyní zbývá přiřadit hodnoty zbývajícím $\frac{m}{2}$ vrcholům komponenty H , vrcholům $y_i \in V(H)$ přiřazujeme hodnoty $\frac{m}{2} + n + 1, \frac{m}{2} + n + 2, \dots, \frac{m}{2} + n + \frac{m}{2}$, tedy celá čísla z intervalu $[\frac{m}{2} + n + 1, m + n]$.

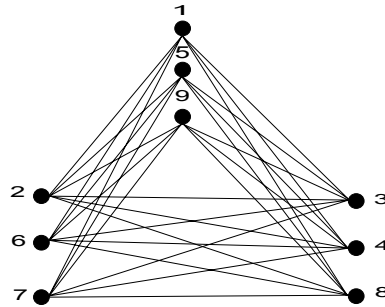


Obrázek 26: Interval hodnot vrcholů komponent H a G , vyznačené modrou, respektive červenou barvou.

Z Obrázku 26 je tedy zřejmé, že každý z $m+n$ vrcholů grafu $G \cup H$ má jiné ohodnocení. \square

Příklad konstrukce 6-pravidelného distance magic grafu přidáním komponenty

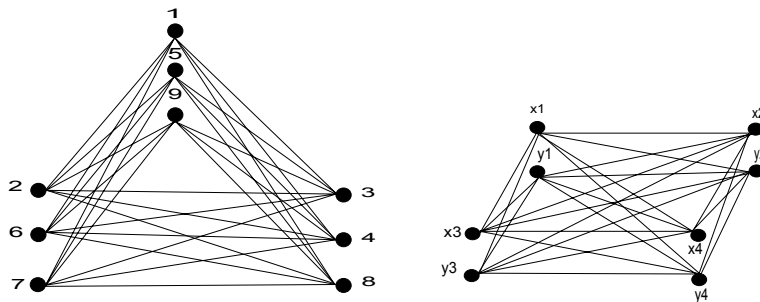
Mějme 6-pravidelný graf G na 9 vrcholech, který je distance magic, a jehož magická konstanta je $k=30$.



Obr.1 - Graf G

Obrázek 27: Graf G .

- přidaná komponenta H je kompletní 4-partitní graf $K_{2,2,2,2}$, který je také 6-pravidelný,

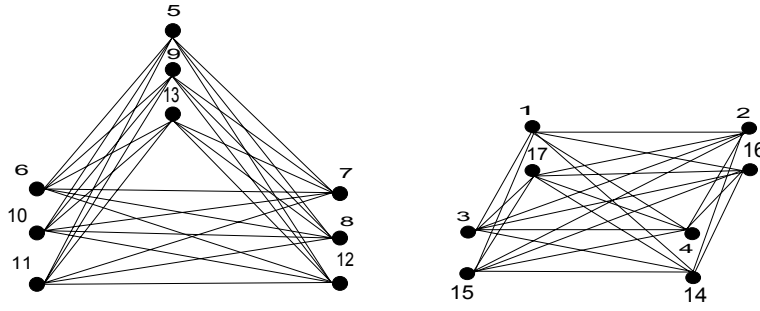


Obrázek 28: Graf G a komponenta H .

- ohodnotíme vrcholy dle následujícího předpisu

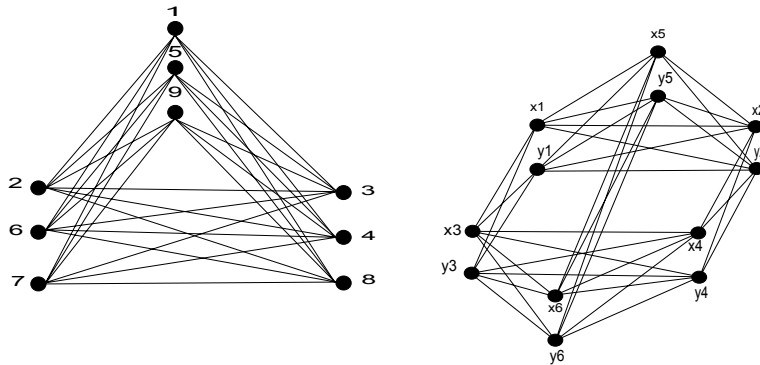
$$f'(v) = \begin{cases} f(v) + 4 & \text{pro } v \in V(G), \\ i & \text{pro } x_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, 3, 4, \\ 18 - i & \text{pro } y_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (2)$$

- váhy grafů G a H jsou stejné a jsou rovny magické konstantě k' ,
- graf $G \cup H$ je tedy 6-pravidelný a distance magic, s magickou konstantou $k' = 54$,

Obrázek 29: Graf $G \cup H$.

Pravidelnost grafu G je 6, což je číslo, které není dělitelné čtyřmi beze zbytku. Pokud bychom tedy chtěli zvýšit počet vrcholů a zároveň zachovat možnost distance magic ohodnocení, počet vrcholů m komponenty H musí být $m \equiv 0 \pmod{4}$. Jestliže budeme vycházet z našeho příkladu, tak další takto konstruovaný distance magic graf $G \cup H$ bude existovat až na $r + 6$ vrcholech, tedy počet vrcholů komponenty H bude $m = 12$. Shrňme tuto situaci v bodech, kterou opět znázorníme obrázky.

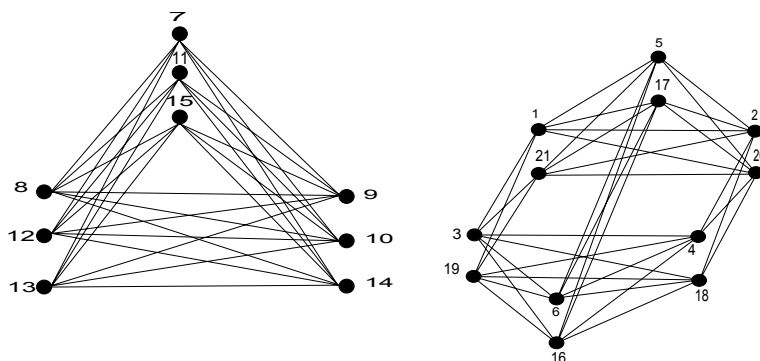
- přidaná komponenta H je 6-partitní graf $K_{\underbrace{2, 2, \dots, 2}_6}$, který je 6-pravidelný

Obrázek 30: Graf G a komponenta H .

- ohodnotíme vrcholy dle následujícího předpisu

$$f'(v) = \begin{cases} f(v) + 6 & \text{pro } v \in V(G), \\ i & \text{pro } x_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, \dots, 6, \\ 22 - i & \text{pro } y_i \in V(H), \text{ kde } i = 1, 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (3)$$

- váhy grafů G a H jsou stejné a jsou rovny magické konstantě k' ,
- graf $G \cup H$ je tedy 6-pravidelný a distance magic, s magickou konstantou $k' = 66$,

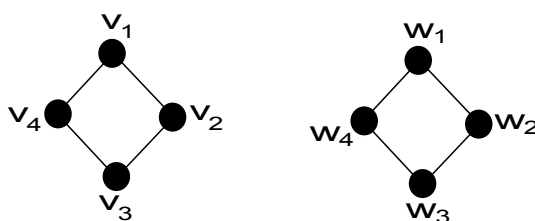
Obrázek 31: Graf $G \cup H$.

2.2 Sestavení souvislého grafu

Graf $G \cup H$ je distance magic, ale nesouvislý. Představuje zakreslení nějakého turnaje, kde se hráči mezi sebou utkávají ve dvou skupinách, které představují komponenty G a H . Je však rozumné požadovat vzájemnou konfrontaci týmů mezi těmito skupinami, tedy aby hráči ze skupiny G měli možnost utkat se s hráči skupiny H a naopak. Nyní ukážeme, jak to zajistit. Tedy jak z nesouvislého grafu $G \cup H$ udělat graf souvislý, a zároveň aby zůstala zachována podmínka distance magic ohodnocení.

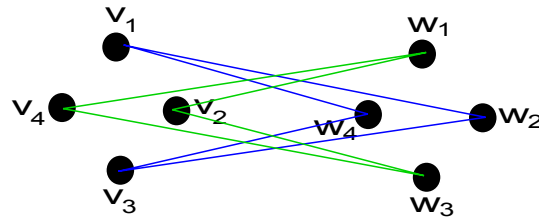
Označme vrcholy komponenty G v_1, v_2, \dots, v_n , a vrcholy komponenty H w_1, w_2, \dots, w_n . Pokusme se nalézt v obou komponentách cyklus na čtyřech vrcholech C_4 , který je v komponentě G tvořený vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4 a v komponentě H vrcholy w_1, w_2, w_3, w_4 . Podmínkou je, aby součet ohodnocení každých dvou nesousedních vrcholů v těchto cyklech obou komponent byl stejný.

Poznámka 2.4. Pro přehlednost budeme podgraf C_4 komponenty G značit C_G . Podgraf C_4 komponenty H označme C_H .

Obrázek 32: Indukované cykly C_G a C_H .

Dle obrázku 32 chceme najít takové cykly, aby součet ohodnocení dvou nesousedních vrcholů byl roven nějakým přirozeným číslům a a b , tedy $f(v_1) + f(v_3) = f(w_1) + f(w_3) = a$ a $f(v_2) + f(v_4) = f(w_2) + f(w_4) = b$, kde a je váha vrcholů v_2 a v_4 v podgrafu C_G , ta je rovna váze vrcholů w_2 a w_4 v podgrafu C_H , podobně b je váha vrcholů v_1 a v_3 v C_G a rovna váze

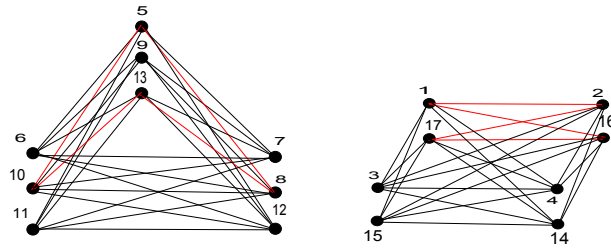
vrcholů w_1 a w_3 v C_H . Protože tyto váhy se rovnají v obou cyklech, tak po odstranění hran původních cyklů můžeme přidat jiné hrany vedoucí mezi vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4 komponenty G a vrcholy w_1, w_2, w_3, w_4 komponenty H , jak znázorňuje následující obrázek.



Obrázek 33: Hrany vedoucí mezi vrcholy obou komponent.

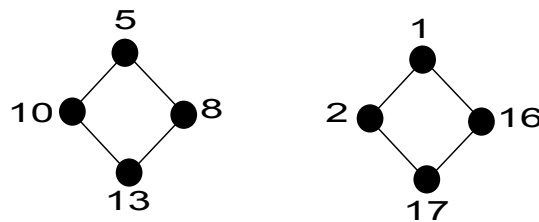
Obecně, můžeme v obou komponentách grafu $G \cup H$ nalézt cykly (splňující výše uvedené podmínky), kdy a i b jsou různá čísla, ale i cykly, kde $a = b$. Ukažme si tyto situace na příkladech.

Mějme distance magic graf $G \cup H$ na 17 vrcholech (Obrázek 29). Následující obrázek zvýrazňuje cykly C_G a C_H , které splňují výše uvedené podmínky.



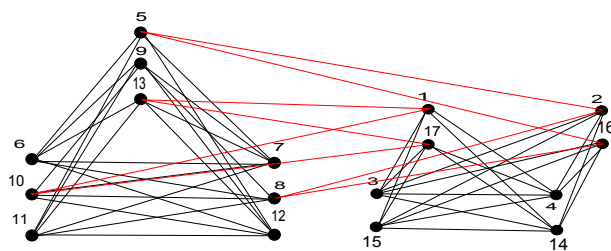
Obrázek 34: Komponenty G a H se zvýrazněnými cykly C_G a C_H .

Zvýrazněný cyklus C_G je tedy tvořen vrcholy 5, 8, 10, 13, cyklus C_H tvoří vrcholy 1, 2, 16, 17. Váhy protilehlých vrcholů jsou $v_1 + v_3 = v_2 + v_4 = w_1 + w_3 = w_2 + w_4 = 18$.

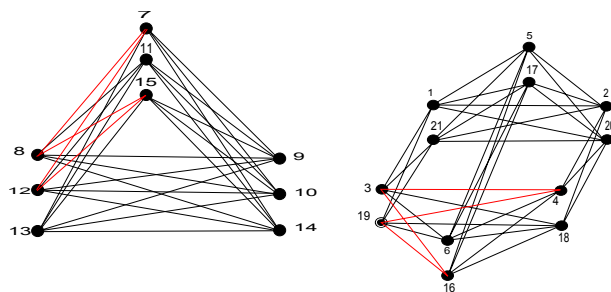


Obrázek 35: Cykly C_4 komponent G a H .

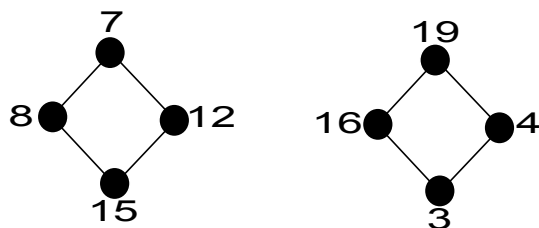
Po odstranění hran tvořící jednotlivé cykly, a připojení vrcholů mezi komponentami tak, aby jejich váhy zůstaly shodné vypadá graf $G \cup H$ s jedinou komponentou souvislosti následovně.

Obrázek 36: Souvislý graf $G \cup H$.

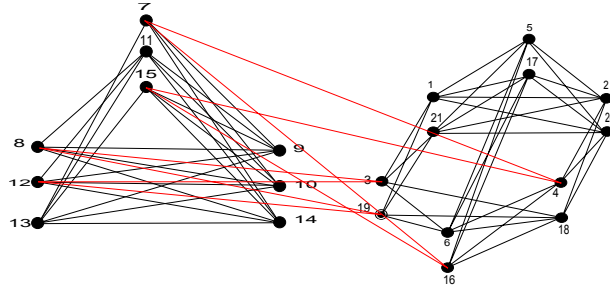
Pro $a \neq b$ vezměme nyní distance magic graf $G \cup H$ na 21 vrcholech (obr 31) a opět vyznačme vhodné cykly.

Obrázek 37: Komponenty G a H se zvýrazněnými cykly C_G a C_H .

Zvýrazněný cyklus C_G tvoří vrcholy 7, 12, 15, 8, cyklus C_H je tvořen vrcholy 19, 4, 3, 16. Váhy každých dvou vrcholů v těchto cyklech jsou různé, tedy $v_1 + v_3 = w_1 + w_3 = 22$ a $v_2 + v_4 = w_2 + w_4 = 20$.

Obrázek 38: Cykly C_4 komponent G a H .

Opět odstraníme hrany jednotlivých cyklů a přidáme nové, které budou propojovat jednotlivé komponenty.

Obrázek 39: Souvislý graf $G \cup H$.

Můžeme tedy vyslovit následující tvrzení.

Věta 2.2. *Mějme r -pravidelný distance magic graf se dvěma komponentami G a H , pro $r \geq 4$. Je-li G komponenta na n vrcholech s podgrafem C_4 $v_1v_2v_3v_4$, kde $f(v_1) + f(v_3) = f(v_2) + f(v_4) = a$, kde a je váha vrcholů v_1, v_2, v_3 a v_4 , a současně H je komponenta na m vrcholech s podgrafem C_4 $w_1w_2w_3w_4$, kde $f(w_1) + f(w_3) = f(w_2) + f(w_4) = a$, a kde a je váha vrcholů w_1, w_2, w_3 a w_4 , přičemž alespoň jedna komponenta zůstane souvislá po odebrání hran uvedeného cyklu C_4 , tak umíme najít souvislý r -pravidelný distance magic graf $G \cup H$ na $n + m$ vrcholech.*

Větu 2.2 umíme dokonce zesílit pro případ, kdy $f(v_1) + f(v_3) = a = f(w_1) + f(w_3)$ a zároveň $f(v_2) + f(v_4) = b = f(w_2) + f(w_4)$.

A navíc, máme-li dán takový r -pravidelný souvislý distance magic graf G na n vrcholech, pro $r \geq 4$, který obsahuje podgraf C_4 tak, že $f(v_1) + f(v_3) = f(v_2) + f(v_4) = n + 1$, tak v přidané komponentě H umíme potřebný podgraf C_4 najít vždy. Stačí vzít $v_1 = x_i, v_3 = y_i, v_2 = x_j$ a $v_4 = y_j$, pro nějaká přirozená i, j .

Můžeme proto říci, že obsahuje-li graf G ve Větě 2.1 navíc podgraf C_4 $v_1v_2v_3v_4$, kde $f(v_1) + f(v_3) = f(v_2) + f(v_4) = n + 1$, tak umíme najít takový r -pravidelný graf, který je souvislý.

2.3 Král turnaje a distance magic grafy

V této části se zaměříme na hledání krále v distance magic grafech. Připomeňme, že král je takový vrchol, z něhož vede orientovaná cesta délky nejvýše 2 do všech ostatních vrcholů. Naším předmětem zkoumání budou neorientované distance magic, chceme totiž navrhnout takový spravedlivý turnaj, kde si každý hráč ještě před zahájením vzájemných soubojů může říci, že je na tom stejně jako ostatní. A za jakých podmínek se vrchol (hráč) může stát králem neúplného turnaje?

- turnaj musí být neremízový (např. tenisový či volejbalový turnaj),
- odehrávají se jednotlivé zápasy (zorientují se hrany grafu).

Poté můžeme provést rozbor výsledného orientovaného grafu—kolik kdo vyhrál zápasy nebo zda se stal nějaký hráč králem turnaje.

Pokud bychom se zaměřili na možnost existence krále turnaje v grafu, ještě před orientací, pak ve výsledku můžeme dojít k takovýmto výsledkům:

- v grafu G má každý vrchol stejnou šanci stát se králem,
- v grafu G existují vrcholy, které mohou být králem, ale i vrcholy, které nemohou být králem,
- v grafu G nemůže být žádný vrchol králem.

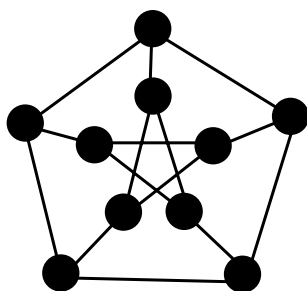
Pro analýzu těchto situací využijeme pojmy excentricita vrcholu a průměr grafu. Mějme nějaký r -pravidelný G na n vrcholech.

- jeli průměr grafu G nejvýše 2, pak v tomto grafu má každý vrchol stejnou šanci stát se králem,
- existují-li v grafu G vrcholy s excentricitou nejvýše 2 a zároveň vrcholy s excentricitou větší než 2, pak v tomto grafu existují vrcholy, které mohou být králem, ale také vrcholy, které nemohou být králem,
- je-li excentricita každého vrcholu grafu G větší než 2, nebo pokud graf G je nesouvislý graf, pak v tomto grafu žádný vrchol nemůže být králem.

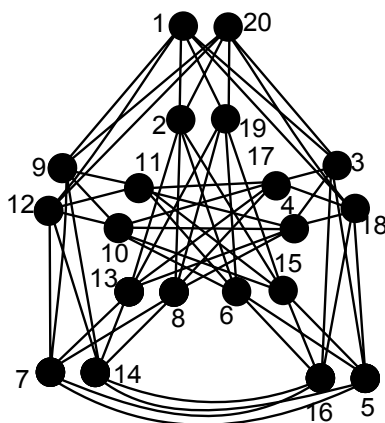
My se však chceme zaměřit na hledání krále v distance magic grafech—tedy vyrovnaných nekompletních turnajích (EIT).

Pokud si vezmeme nějaký libovolný r -pravidelný graf G na n vrcholech, jehož průměr $\text{diam}(G) \leq 2$ nebo pokud v tomto grafu existují vrcholy s excentricitou $\text{ecc}(v) \leq 2$ a zároveň $\text{ecc}(v) \geq 2$, pro $v \in V(G)$, a složíme ho s doplňkem kompletního grafu \overline{K}_{2m} , kde $m \geq 1$, pak dostaneme graf $G[\overline{K}_{2m}]$, který je distance magic, dle Věty 1.8. Graf $G[\overline{K}_{2m}]$ je tvořen n partitami, kde každá partita obsahuje $2m$ vrcholů. Pokud vedla hrana mezi vrcholy u a v v grafu G , pak v grafu $G[\overline{K}_{2m}]$ povedou hrany mezi každou dvojicí vrcholů partit P_u a P_v , kde partita P_u obsahuje vrcholy $\{u_1, u_2, \dots, u_{2m}\}$ a partita P_v je tvořena vrcholy $\{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$. Pokud v grafu G excentricita vrcholu $\text{ecc}(v) \leq x$, pak i v grafu $G[\overline{K}_{2m}]$ excentricita všech vrcholů partity $\text{ecc}(P_v) \leq x$, pro $x \geq 2$. Jednotlivé vrcholy pak můžeme ohodnotit tak, aby součet ohodnocení všech vrcholů v partitě byl roven stejnému číslu pro každou partitu, což zajistí stejnou váhu každému vrcholu grafu $G[\overline{K}_{2m}]$. Ukažme tato tvrzení na příkladech.

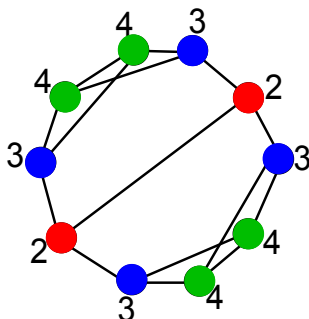
Vezměme si nějaký r -pravidelný graf G na n vrcholech, kde excentricita každého vrcholu $\text{ecc}(v) \leq 2$, pro $v \in V(G)$. Takový graf může být například Petersenův graf P , což je 3-pravidelný graf na 10 vrcholech, který je vrcholově tranzitivní, a kde excentricita každého vrcholu je 2, tudíž každý vrchol má stejnou šanci stát se králem v turnaji, který vznikne orientací Petersenova grafu.

Obrázek 40: Petersonův graf P .

Kompozicí grafu P s doplňkem kompletního grafu $\overline{K_2}$ získáme 6-pravidelný distance magic graf na 20 vrcholech, kde excentricita každého vrcholu je také 2. Na obrázku 41 můžeme vidět tento graf s distance magic ohodnocením, kde magická konstanta $k = 63$.

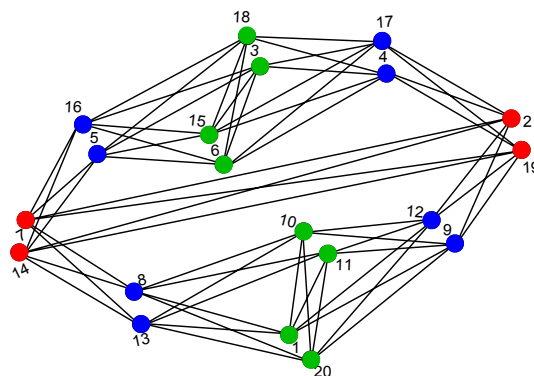
Obrázek 41: Distance magic graf $P[\overline{K_2}]$.

Opět si vezměme nějaký 3-pravidelný graf na 10 vrcholech s tím rozdílem, že ne všechny vrcholy budou mít excentricitu nejvýše dva.



Obrázek 42: 3-pravidelný graf G na 10 vrcholech s uvedenými excentricitami, kde červeně vyznačené vrcholy mají stejnou šanci stát se králem.

Jak můžeme vidět na Obrázku 42, šanci stát se králem v turnaji, který vznikne orientací grafu G , budou mít pouze vrcholy s excentricitou 2 (červené vrcholy). Kompozicí G s doplňkem kompletního grafu \overline{K}_2 získáme 6-pravidelný distance magic graf na 20 vrcholech, kde excentricita vrcholů je také 2, 3 nebo 4.



Obrázek 43: Distance magic graf $G[\overline{K}_2]$.

Pokud bychom srovnali oba grafy—graf P z Obrázku 40 a graf G z Obrázku 42, tak můžeme říci, že pro plánování vyrovnaných neúplných turnajů, kde každý vrchol má stejnou šanci stát se králem, je vhodnější volit takové souvislé r -pravidelné grafy, které jsou vrcholově tranzitivní s průměrem nejvýše 2. Pokud takový graf neexistuje, například pro grafy s malou pravidelností na velkém počtu vrcholů, tak pro plánování neúplných sportovních turnajů preferujeme vrcholově tranzitivní grafy, za předpokladu, že se nám podaří najít jejich DM ohodnocení.

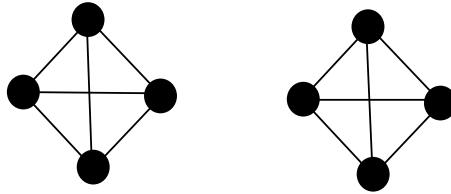
Všimněme si, že pokud známe průměr a pravidelnost grafu, tak jeho počet vrcholů je omezen. Pro dané r a průměr d je počet vrcholů $n \leq 1 + r + r(r-1) + r(r-1)(r-1) + \dots +$

$r(r-1)^{(d-1)}$. Pokud má v orientaci r -pravidelného grafu existovat král, musí jeho průměr být nejvýše 2 a proto počet vrcholů n je nejvýše $1 + r + r(r-1)$.

Graf, ve kterém nemůže být žádný vrchol králem, je zřejmě graf G , kde každý jeho vrchol má excentricitu $ecc(v) > 2$, pro $v \in V(G)$. Další typ grafu, ve kterém neexistuje král, je nesouvislý graf.

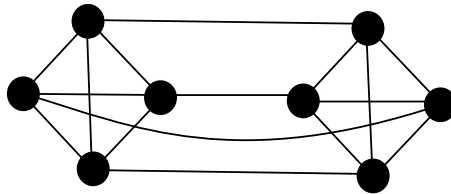
Existuje ovšem možnost, jak z nesouvislého grafu $G \cup H$, který je tvořen dvěma komponentami G a H na shodném počtu vrcholů, vytvořit souvislý graf I s distance magic ohodnocením tak, aby každý vrchol měl excentricitu nejvýše 2, tedy stejnou šanci stát se králem turnaje v orientovaném grafu I . Průměr jednotlivých komponent však musí být nejvýše 2, tedy $diam(G) \leq 2$ a zároveň $diam(H) \leq 2$. Ukažme nyní možnosti, které mohou nastat.

Nechť $G \cup H$ je nesouvislý graf s komponentami G a H na shodném počtu vrcholů, kde excentricita každého vrcholu v jednotlivých komponentách $ecc(u) = 1$, pro $u \in V(G)$, a zároveň $ecc(v) = 1$, pro $v \in V(H)$. Pak komponenty G a H budou zřejmě kompletní grafy K_n , které jsou $(n-1)$ -pravidelné. Spojíme-li hranou každý vrchol komponenty G s nějakým vrcholem komponenty H tak, aby i každý vrchol z komponenty H byl spojen s právě jedním vrcholem v G , stupeň každého vrcholu se zvýší o 1 a vznikne souvislý graf I , kde excentricita každého vrcholu $ecc(w) = 2$, pro $w \in V(I)$. Graf I pak můžeme složit s doplňkem kompletního grafu \overline{K}_{2m} . Vznikne graf $I[\overline{K}_{2m}]$, kde excentricita každého vrcholu je také dva, proto I má průměr 2. Pravidelnost se zvýší $2m$ -násobně. Tuto situaci si ukážeme na příkladu grafu, jehož komponenty tvoří kompletní grafy K_4 .



Obrázek 44: Graf $G \cup H$, kde komponenty G a H jsou kompletní grafy K_4 .

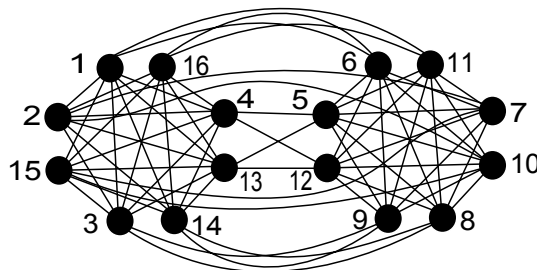
Každý vrchol obou komponent spojíme hranou mezi sebou. Vznikne souvislý graf I , jehož průměr $diam(I) = 2$.



Obrázek 45: Graf I na 8 vrcholech.

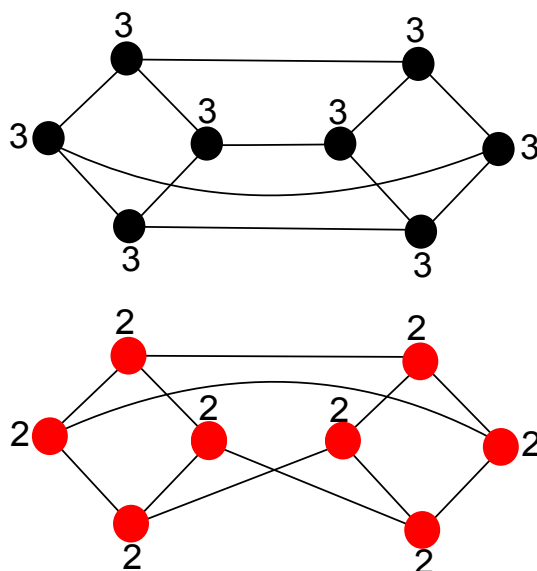
Poznámka 2.5. *Lze si všimnout, že graf I je vlastně kartézský součin $K_4 \square K_2$.*

Graf I pak složíme s doplňkem kompletního grafu $\overline{K_2}$ a ohodnotíme.



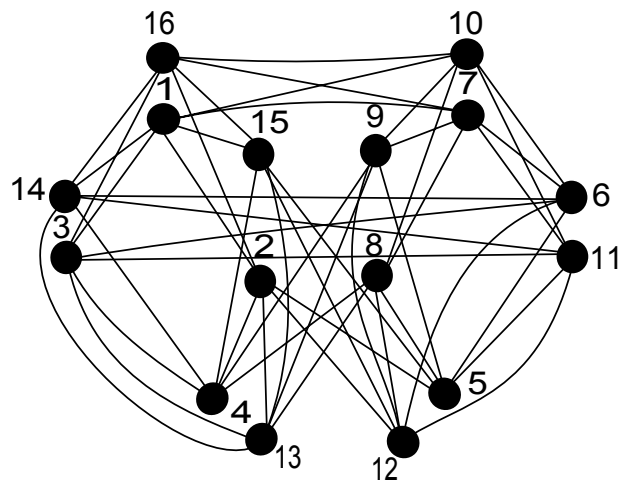
Obrázek 46: Distance magic graf I' na 16-ti vrcholech, kde magická konstanta $k = 68$, a jehož průměr 2.

Nechť $G \cup H$ je nyní nesouvislý graf s komponentami G a H na shodném počtu vrcholů, kde excentricita každého vrcholu v jednotlivých komponentách $ecc(u) = 2$, pro $u \in V(G)$, a zároveň $ecc(v) = 2$, pro $v \in V(H)$. Komponenty G a H mohou být například cykly C_4 , C_5 nebo Petersonův graf P . Jestliže aplikujeme podobný postup, jako v předchozím příkladu, tedy spojení každého vrcholu mezi těmito komponentami právě jednou hranou, je třeba dbát na správné „propojení“ jednotlivých vrcholů, aby ve výsledném souvislém grafu I měl každý vrchol excentricitu nejvýše 2. Na následujícím obrázku můžeme vidět ukázkou špatného i dobrého spojení komponent grafu $G \cup H$, kde G a H jsou cykly C_4 .



Obrázek 47: Výše graf I_1 , kde excentricita každého vrcholu je 3. Níže graf I_2 , jehož průměr již je 2.

Graf I_2 již splňuje požadovanou excentricitu každého vrcholu, pak kompozicí I_2 s doplňkem \overline{K}_2 dostaneme graf $I_2[\overline{K}_2]$, který opět ohodnotíme tak, aby tyto hodnoty vrcholů partity dávaly v součtu stejné číslo.



Obrázek 48: 6-pravidelný distance magic graf I'_2 na 16 vrcholech, kde každý vrchol má šanci stát se králem.

3 Závěr

Tato práce se věnovala problému využití grafů s distance magic ohodnocením, které lze použít na plánování neúplných sportovních turnajů.

V úvodní části jsme nejprve definovali základní pojmy týkající se grafů obecně. V podkapitole 1.2 jsme poté uvedli přehled výsledků zaměřené na distance magic grafy, které nám pomohly v dalších postupech.

V hlavní části práce jsme se věnovali novému způsobu konstrukce těchto grafů pomocí přidání komponenty. Ukázali jsme, že pokud máme r -pravidelný graf G na n vrcholech, který je distance magic, pak po přidání komponenty H na m vrcholech, kde $m \geq r + 2$, vznikne nesouvislý r -pravidelný graf $G \cup H$ na $n + m$ vrcholech, který je také distance magic. Řekli jsme také, že počet vrcholů m komponenty H závisí na pravidelnosti r grafu G , je-li totiž $r \equiv 0 \pmod{4}$ pak m je sudé, pokud ale $r \equiv 2 \pmod{4}$, pak $m \equiv 0 \pmod{4}$. Další z hlavních cílů práce bylo vyřešení problému nesouvislosti grafu $G \cup H$. Zjistili jsme, že pokud v jednotlivých komponentách G a H nalezneme podgrafy C_G a C_H , kde C_G tvoří vrcholy v_1, v_2, v_3 a v_4 a C_H je tvořen vrcholy v_1, v_2, v_3 a v_4 a zároveň pokud součty jednotlivých ohodnocení vrcholů $f(v_1) + f(v_3) = f(v_2) + f(v_4) = a$ a $f(w_1) + f(w_3) = f(w_2) + f(w_4) = a$, v případě silnějšího tvrzení $f(v_1) + f(v_3) = a = f(w_1) + f(w_3)$ a zároveň $f(v_2) + f(v_4) = b = f(w_2) + f(w_4)$, nebo váha vrcholu $w_f(v) = n + 1$, pro $v \in C_G$, přičemž alespoň jedna komponenta zůstane po odebrání tohoto cyklu souvislá a pravidelnost $r \geq 4$, tak umíme najít souvislý graf $G \cup H$ na $n + m$ vrcholech, který je r -pravidelný a distance magic. Právě možnost „zesouvislení“ komponent G a H nám umožní při návrhu turnajů odstranit neporovnatelnost skupin týmů, které představují vrcholy v jednotlivých komponentách.

V poslední části hlavní kapitoly jsme se zabývali možností existence krále turnaje v distance magic grafech. Ukázali jsme, že pro tvorbu spravedlivých turnajů, tedy grafů kde každý vrchol má stejnou šanci stát se králem turnaje, je nejlepší volit souvislé vrcholově tranzitivní r -pravidelné grafy, pokud $r \geq 4$. Definovali jsme však také maximální počet vrcholů n , na kterém graf G může existovat, pokud známe jeho průměr a pravidelnost. Řešili jsme také možnost zesouvislení dvou grafů, tak aby ve výsledném souvislém grafu měl každý vrchol stejnou šanci stát se králem turnaje, což lze splnit pouze v případě, pokud excentricita každého vrcholu v obou komponentách je buď 1 nebo 2. Problematika týkající se možností existence králů v distance magic grafech bude předmětem zkoumání i v budoucnu.

4 Literatura

Reference

- [1] S. Arumugam, D. Froncek and N. Kamatchi, Distance Magic Graphs-A Survey, *accepted*
- [2] D. Fronček, P. Kovář, and T. Kovářová, Fair incomplete tournaments, Bulletin of the ICA, 48, (2006), 31–33.
- [3] D. Fronček, P. Kovář and T. Kovářová, Constructing distance magic graphs from regular graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*
- [4] P. Kovář, Teorie grafů, skriptum VŠB-TU Ostrava (2011)
- [5] P. Kovář, T. Kovářová, and D. Fronček, A note on 4-regular distance magic graphs, *submitted*.
- [6] P. Kovář, A. Silber, P. Kabelíková, and M. Kravčenko, On regular distance magic graphs of odd order, *submitted*.
- [7] P. Kovář, A. Silber, Distance magic graphs of high regularity, *submitted*.
- [8] M. Krbeček, Aplikace 1-VMV ohodnocení grafů, VŠB-TU Ostrava (2012)
- [9] M. Miller, C. Rodger, and R. Simanjuntak, Distance magic labelings of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 28 (2003), 305–315.
- [10] S. B. Rao, T. Singh and V. Parameswaram, Some sigma labelled graphs I, In Graphs, Combinatorics, Algorithms and Applications, eds. S. Arumugam, B. D. Acharya and S. B. Rao, Narosa Publishing house, New Delhi, (2004), 125–133.
- [11] J. Sedláček, **Problem 27** in Theory of Graphs and its Applications, *Proc. Symposium Smolenice 1963*, Prague (1964), 163–164.
- [12] A. Silber, Vrcholově magická ohodnocení grafů, VŠB-TU Ostrava (2010).
- [13] K. A. Sugeng, D. Fronček, M. Miller, J. Ryan and J. Walker, On distance magic labeling of graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **71** (2009), 39–48.